2021

MÓDULO DE INGRESO

IES PROF MANUEL MARCHETTI

ANEXO III BELLA VISTA

PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

EN MATEMÁTICA

Fundamentación

La Matemática es una ciencia dinámica, siempre inserta en la historia de la humanidad como ciencia autónoma y como instrumento para otras ciencias, unida al desarrollo tecnológico e íntimamente ligada a la filosofía por su reflexión teórica.

La Matemática se ha incluido en toda propuesta curricular, no sólo por el valor y finalidad de sus contenidos específicos, sino también por sus aportes para el desarrollo del razonamiento lógico. En este sentido, cabe señalar que la educación matemática tiene fundamental incidencia en el desarrollo intelectual de los estudiantes tanto en forma individual como en grupos.

"Es necesario que los alumnos de hoy, adquieran habilidades sociales, que les permitan trabajar y resolver dificultades en grupos heterogéneos, con personas de diferentes capacidades que ellos. Es responsabilidad de la escuela *formar ciudadanos sanamente escépticos, inquietos, con gran curiosidad y ganas de aprender, y con recursos propios para poder hacerlo. El reto está ahí (…) es necesario saber afrontarlo*..."[1]

El desafío actual es "lograr alfabetizarlos matemáticamente", y para ello los estudiantes deberán fortalecer procesos típicos del pensamiento matemático ya adquiridos o incorporar otros nuevos, comunicarlos y compartirlos para lo cual se enfatizará el conocimiento y el empleo de estrategias de resolución de problemas, es decir que un **profesor de matemática** promoverá que los estudiantes aborden estrategias propias, utilicen las representaciones que consideren adecuadas, discutan con sus pares, expliquen sus ideas, den razones de sus procedimientos y resultados, confronten sus producciones con las de otros, acepten críticas así como otros puntos de vista.

El Proceso de Aprendizaje de la Matemática, en la formación académica de docentes, debe constituir una instancia en la que el futuro profesional interactúe con el conocimiento matemático de un modo constructivo que le permita apropiárselo y, simultáneamente, le proporcione la vivencia de que él también es un productor - generador de dicho conocimiento; es esta vivencia la que le permitirá revalorizarse como sujeto activo de su propio proceso de formación, en el que se ponen en juego tanto los discursos disciplinares como los pedagógicos-didácticos.

Lo primordial es concebir al dominio matemático como las competencias de resolución de problemas como el eje fundamental de la actividad matemática. Estas competencias se desarrollan mediante el tratamiento de ciertos contenidos por su valor instrumental ante las demandas científicas, tecnológicas, sociales y éticas, de este tiempo.

En consecuencia, la formación del futuro profesional, la búsqueda de ejes de articulación e integración entre contenidos y métodos, conocimientos y procedimientos, saberes científicos y saberes de construcción posibilitan la evolución de la estructura del pensamiento.

EQUIPO DOCENTE 2021

---

[1] Claudi Alsina en "El curriculum de matemática en los inicios del siglo XXI", 2000

Presentación del módulo

En nombre de todo el equipo docente de la carrera del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática, les damos la bienvenida a todxs los ingresantes para el período lectivo 2021.

No podemos comenzar sin dejar de hacer referencia a la situación de Pandemia que atravesó la humanidad toda durante el año 2020. Este escenario llamó a redefinir toda tarea educativa ante las misma incertidumbre, de enseñar en contextos de distanciamiento social y los consecuentes inconvenientes que esto acarreo en todos los niveles educativos. Es así, que el cuerpo docente del IES Bella Vista redefine el módulo de ingreso a esta carrera de formación docente planteando una serie de actividades acordes a la fundamentación del área que resultan indispensables disponer a la hora de encarar cualquier tipo de trabajo matemático.

De esta manera les vamos a ofrecer un trabajo planificado en módulos y para este primer módulo se abordara el estudio de los **conjuntos numéricos**.

Cuando nos comunicamos en nuestra vida cotidiana y utilizamos el término “conjunto”, seguramente nos estamos refiriendo a un grupo de objetos de alguna naturaleza determinada.

En matemática esta expresión no está para nada alejada de lo que entiendes por un conjunto, la diferencia radica en que los conjuntos que trataremos son aquellos que están formados por números.

Los números son elementos fundamentales en el estudio de la matemática, ya que gracias a ellos se pueden precisar o determinar exactamente respuestas a algunas de las preguntas del ser humano, es por esto que es tan importante analizarlos, trabajarlos es lo que haremos en esta unidad.

OBJETIVOS

- Definir los conjuntos numéricos seleccionados para este módulo.
- Distinguir claramente entre números racionales e irracionales.
- Revisar la aritmética de los números reales en busca de la incorporación de estrategias de cálculo que resulten más económicas.
- Adquirir habilidad en la resolución de situaciones problemáticas con los distintos conjuntos numéricos.

NÚMEROS NATURALES

Los números naturales son los que normalmente ocupamos para contar, se representan por el símbolo N. Sus elementos son:

$\mathbb{N}= \{1, 2, 3, 4, . . .1\}$

Los números naturales también sirven para ***ordenar***. Por ejemplo, decimos martes es el segundo día de la semana; 5 es el quinto número natural, etc.

Observa que ...

$1 + 5 = 6 \quad \in N$

$4 \times 7 = 28 \in N$

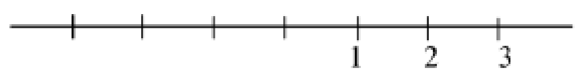
$2 - 2 = 0 \notin N$

$3 - 8 = -5 \notin N$

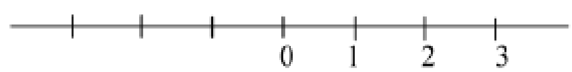
✓ *Este conjunto es "cerrado" para la suma y la multiplicación, es decir: para todo par de números en N, su suma y su multiplicación también es un número natural.*

✓ *Este conjunto NO es "cerrado" para la resta y la división, ya que: para todo par de números en N, su resta y división NO es necesariamente un número natural.*

Los números naturales es un conjunto ordenado. Se los representa en la recta numérica.



Si al conjunto de los números naturales le agregamos el 0 (cero), obtenemos el conjunto de los Números Cardinales; este se representa por el símbolo N_0, y sus elementos son: $N_0= \{0, 1, 2, 3, 4, . . .1\} = N \cap \{0\}$



NÚMEROS ENTEROS

Es el conjunto formado por los números naturales, sus inversos aditivos, y el neutro aditivo.

$$\mathbb{Z} = \{-\infty . . . ,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, . . .\infty\}= \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{N}_0$$

Se dice que un número a tiene ***inverso aditivo***, si existe un b tal que:
a + b = 0
b es también conocido como **– a**.

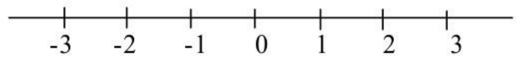
Para cualquier número x existe un único que cumple que:
x + (ese único) = x
a ese número lo conocemos como ***neutro aditivo***, (o también conocido como **0**).

✓ A diferencia de los números Naturales, este conjunto si es "cerrado" para la suma, la resta y la multiplicación; es decir: para todo par de números enteros, su suma, multiplicación y diferencia es siempre un número entero.

✓ Este conjunto no es cerrado para la división, y a que una división entre dos *números enteros no es necesariamente otro número entero.*

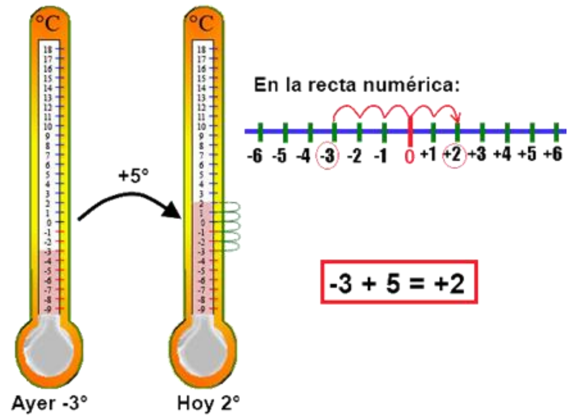
Ejemplos:

$$-2 \in Z \ \ implica \ -(-2) = 2 \in Z$$
$$3,-7 \in Z \ \ implica \ 3 + (-7) = -4 \in Z$$
$$3,-7 \in Z \ \ implica \ 3 - (-7) = 10 \in Z$$
$$3,-7 \in Z \ \ implica \ 3 \times (-7) = -21 \in Z$$

Su representación gráfica es, 

Ejemplo: Ayer amaneció con una temperatura de 3°C bajo cero; hoy la temperatura aumento 5°C. ¿Cuál es la temperatura de hoy?

Solución:



Piensa…
¿Existe un numero racional que sea menor o igual que todos los demás?, y ¿mayor igual que todos los demás?
¿Qué podrías afirmar sobre la cantidad de racionales que existen entre dos de ellos?
¿Cuántos racionales hay entre dos cualesquiera?

ALGORITMO DE LA DIVISION

Sean a, b ∈Z con a ≠ 0, si dividimos a en b, entonces existen q y r también enteros tales que:

$$a = b \,.\, q + r$$

El resto de una división nunca es negativo.

El resto de dividir dos números enteros puede ser distinto de cero.

Ejemplo: divide 7 en 2.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 7 = 2.3 + 1 \quad \Rightarrow \quad a = b.\,q + r$$

CRITERIO DE DIVISIBILIDAD

Si el resto de la división es, r = 0

Resulta a = b . q

Se dice entonces que, a divide b, o que b es múltiplo de a, o que a es divisible b.

Observa que…

$$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 8 = 4\,.\,2 + 0$$

de modo que 4 divide a 8, o también, 8 es divisible por 4.

NÚMEROS RACIONALES

Al conjunto de los números racionales lo representamos por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,/\, p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$$

Se cumple que para cada par de números racionales, la suma, resta, multiplicación y división (excepto por cero), es siempre un número de Q, a este tipo de conjuntos se les conoce como ***CUERPO***.

> ***Piensa...***
>
> ¿Existe un numero racional que sea menor o igual que todos los demás?, y ¿mayor o igual que todos los demás?
>
> ¿Qué podrías afirmar sobre la cantidad de racionales que existen entre dos de ellos? ¿Cuántos racionales hay entre dos cualesquiera?

Los números racionales pueden expresarse de diferentes formas.

Ejemplo: expresa de diferentes formas el número cinco cuartos.

Solución

$$\underbrace{\frac{5}{4} = \frac{-5}{-4} = \frac{15}{12} = \frac{125}{100}}_{\text{FRACCIONARIA}} = \underbrace{1{,}25 = 1{,}250\ldots}_{\text{DECIMAL}}$$

- **Forma DECIMAL**

Toda fracción tiene su representación como número decimal, para obtenerlo basta dividir el numerador con el denominador.

Ejemplo:

$$\frac{9}{4} = 2{,}25 \quad \rightarrow \quad \text{N° decimal}: \underbrace{2}_{\text{Parte Entera}} \;,\; \underbrace{2\;5}_{\text{Parte Decimal}}$$

Un número $\mathbb{Q}$ puede tener tres tipos diferentes de expresiones decimales:

- **Decimal finita:** $0,4;\quad -0,324;\quad 84,0021$

- **Decimal periódica pura:** $0,555... = 0,\hat{5}$ $\qquad 7,202020... = 7,\widehat{20}$

- **Decimal periódica mixta:** $0,1555... = 0,1\hat{5}$ $\qquad -5,251313... = -5,25\widehat{13}$

$$N^{\circ}\,decimal: \underbrace{-5}_{\substack{\text{Parte}\\ \text{Entera}}} \;,\; \underbrace{\overbrace{2\;\;5}^{\substack{\text{Parte}\\ \text{No Periódica}}}\;\overbrace{1\;\;3}^{\substack{\text{Parte}\\ \text{Periódica}}}}_{\substack{\text{Parte}\\ \text{Decimal}}}$$

- **Forma FRACCIONARIA**

Vimos que todo número racional puede escribirse como una expresión decimal cuya parte decimal puede tener un número finito o infinito de cifras periódicas, puras o mixtas.

Ahora, es posible convertir ese decimal en fracción. Para ello usaremos la siguiente regla:

$$N^{\circ} = \frac{\text{anota el n° hasta donde se produce la periodicidad} \;-\; \text{las cifras no periódicas de la expresión}}{\text{tantos 9 como cifras periódicas y tantos 0 como cifras no periódicas}}$$

Ejemplo: pasar a fracción los siguientes decimales, a) 6,3333... b) 23,35 c) 0,0351

Solución:

Aplicamos la regla de conversión para dar respuesta a lo solicitado.

$$\begin{aligned}
&a)\quad 6,3333... = 6,\hat{3} = \frac{63-6}{9} = \frac{57}{9} = \frac{19}{3}\\
&b)\quad 23,3\hat{5} = \frac{2335-233}{90} = \frac{2102}{90} = \frac{1051}{45}\\
&c)\quad 0,03\widehat{51} = \frac{351-3}{9900} = \frac{348}{9900} = \frac{29}{825}
\end{aligned}$$

NÚMEROS IRRACIONALES

Es el conjunto de todos los números que no pertenecen al conjunto de los racionales, es decir no se pueden escribir como fracción ya que tienen infinitos decimales sin ninguna relación. Una forma de enunciar sus elementos es:

$$\mathbb{I} = \{ a \, / \, a \notin \mathbb{Q} \}$$

Algunos elementos de éste conjunto son: π,e, $\sqrt{2}$, etc . . .

Observa que...

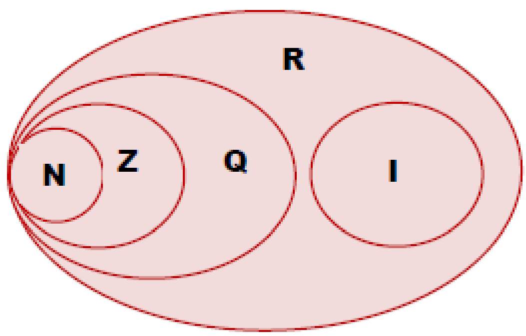
Entre el conjunto de los números racionales y el de los irracionales no existe ningún elemento en común. Además, NO es un cuerpo, ya que sus elementos al sumarse, restarse, multiplicarse, o dividirse pueden obtener un número racional, como por ejemplo; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ y 1 no es un número irracional.

NÚMEROS REALES

Es el conjunto que resulta de la unión de todos los conjuntos que hemos visto, pero como te habrás dado cuenta, en los números racionales están ya incluidos los naturales y los enteros, entonces podemos decir que:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Ver diagrama de Venn del conjunto de los números $\mathbb{R}$.



$$N \subset Z \subset Q \qquad R = Q \cup I$$

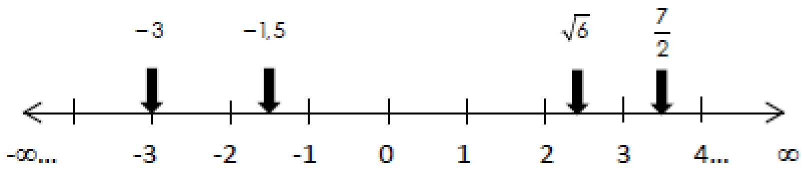
El conjunto de los números reales también puede representarse sobre una recta. A cada número real le corresponde un único punto de la recta, y cada punto de la recta representa un único número real.

A esta recta la llamamos *recta real.*

No siempre somos capaces de representar exactamente un número real, sin embargo siempre es posible obtener una representación aproximada de él a partir de su expresión decimal.

Ejemplo: representa los siguientes números reales

$-1{,}5$ $\sqrt{6}$ $\frac{7}{2}$ -3 en la recta real.



Observa que...

No existe un número real que sea mayor o igual a todos los demás, ni uno que sea menor o igual que todos los demás. Además, entre dos números reales cualesquiera existen infinitos números racionales, e infinitos números irracionales.

- **Propiedades**

Al combinar los números reales utilizando las operaciones de suma y multiplicación, tenemos:

PROPIEDAD	EJEMPLO
$a+b=b+a$	$7+3=3+7$
$a.b=b.a$	$4\,.\,5=5\,.\,4$
$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(3+5)+6=3+(5+6)$
$(a.b).c=a.(b.c)$	$(8\,.\,2)\,.\,3=8\,.\,(2\,.\,3)$
$a.(b+c)=ab+ac$ $(b+c).a=ab+ac$	$2\,.\,(1+4)=2\,.\,1+2\,.\,4$ $(1+4)\,.\,2=2\,.\,1+2\,.\,4$
$(-1).a=-a$	$(-1)\,.\,3=-3$
$-(-a)=a$	$-(-5)=5$
$(-a).b=a.(-b)=-(ab)$	$(-4).\,3=4.\,(-3)=-(4.\,3)$
$(-a).(-b)=ab$	$(-2)\,.\,(-8)=2\,.\,8$
$-(a+b)=-a-b$	$-(7+3)=-7-3$
$-(a-b)=b-a$	$-(8-5)=5-8$

- **Orden operatorio**

Cuando trabajes con ejercicios de operaciones combinadas, es decir ejercicios que contengan sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias, etc, debes tener presente que existen prioridades en el desarrollo de éstas, esto es, hay operaciones que deben realizarse antes que otras para obtener el resultado correcto. Este orden es el siguiente:

1. Potencias
2. Multiplicaciones y divisiones
3. Sumas y restas.

La presencia de paréntesis dentro de algún ejercicio, nos indicará que debemos realizar primero las operaciones que están dentro de él.

Ejemplo:

$$6 + 4\,.\,(14 - 2^2.3) - 26 \div 2$$

Solución:

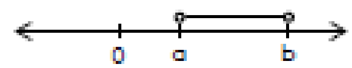
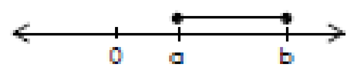
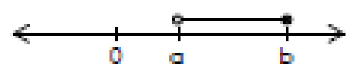
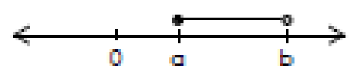
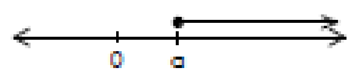
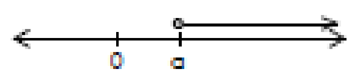
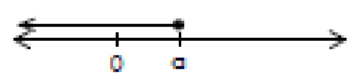
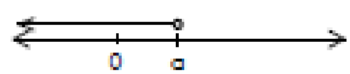
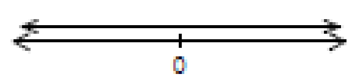
Primero debemos resolver el paréntesis (la potencia, luego la multiplicación y después la resta). Luego la multiplicación por 4 y la división 26 - 2. Posteriormente terminamos con las sumas y restas. Entonces se vería algo así:

$$\begin{aligned} 6 + 4 \cdot (14 - 2^2 \cdot 3) - 26 \div 2 &= 6 + 4 \cdot (14 - 4 \cdot 3) - 26 \div 2 \\ &= 6 + 4 \cdot (14 - 12) - 26 \div 2 \\ &= 6 + 4 \cdot (2) - 26 \div 2 \\ &= 6 + 8 - 26 \div 2 \\ &= 6 + 8 - 13 \\ &= 14 - 13 \\ &= 1 \end{aligned}$$

INTERVALOS

Hemos visto el conjunto de los números reales R, lo podemos representar en una recta numérica. Por lo tanto cada segmento de ésta recta representa un subconjunto de R, cada uno de estos subconjuntos se denomina *Intervalo.*

Existen distintos tipos de intervalos. Observa la siguiente tabla:

INTERVALO	GRAFICA
Intervalo abierto $(a, b) = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$	
Intervalo cerrado $[a, b] = \{x \in R/\; a \leq x \leq b\}$	
Intervalos semiabiertos $(a, b] = \{x \in R \,/\, a < x \leq b\}$	
$[a, b) = \{x \in R \,/\, a \leq x < b\}$	
Intervalos infinitos $[a, \infty) = \{x \in R \,/\, x \geq a\}$	
$(a, \infty) = \{x \in R \,/\, x > a\}$	
$(-\infty, a] = \{x \in R \,/\, x \leq a\}$	
$(-\infty, a) = \{x \in R \,/\, x < a\}$	
$(-\infty, \infty) = R$	

VALOR ABSOLUTO

Para cualquier número real a, el **valor absoluto de a**, denotado por |a|, es:

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

a) |3| = 3 **b)** |- 3 | = - (-3) = 3 **c)** | 2 - n | = - (2 - n) = n – 2

Distancia entre puntos en la recta real

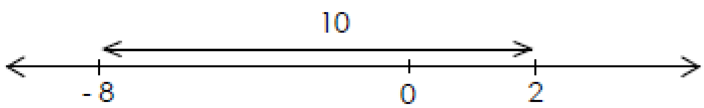
Si a y b son números reales, entonces la distancia entre los puntos a y b en la recta real es:

d(a, b) = |b - a|

Ejemplo: la distancia entre los números - 8 y 2 es:

D(-8, 2) = |- 8 - 2 |= |-10|= 10

Gráficamente



POTENCIACIÓN

Definición

a^n = *a.a.a….*a, a ∈ ℤ y n ∈ ℕ

a: base n: exponente

• Propiedades

Sean (a, b) ∈ ℝ - {0} y (n, m) ∈ ℤ, entonces:

PROPIEDAD	EJEMPLO
$a^m . a^n = a^{m+n}$	$2^3 . 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$6^5 : 6^2 = 6^{5-2} = 6^3$
$(a.b)^n = a^n . b^n$	$(3.4)^2 = 3^2 . 4^2$
$(a:b)^n = a^n : b^n$	$(3:2)^3 = 3^3 : 2^3$
$\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$	$\left(2^3\right)^2 = 2^{3.2} = 2^6$
$a^0 = 1$	$5^0 = 1$
$a^1 = a$	$8^1 = 8$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$4^{-2} = \frac{1}{4^2}$

RADICACIÓN

Definición

$\sqrt[n]{a} = b$ tal que $b^n = a$; n ∈ ℤ; (a, b) ∈ ℝ

a: radicando n: índice de la raíz

La radicación de números entero no siempre es un entero.

Signos de la radicación

i. $\sqrt[impar]{N^\circ \text{ positivo}} = N^\circ$ positivo → $\sqrt[3]{27} = 3$

ii. $\sqrt[impar]{N^\circ \text{ negativo}} = N^\circ$ negativo → $\sqrt[3]{-8} = -2$

iii. $\sqrt[par]{N^\circ \text{ positivo}} = N^\circ$ positivo → $\sqrt[4]{16} = 2$

iv. $\sqrt[par]{N^\circ \text{ negativo}} = \notin R$ → $\sqrt{-9} = \notin R$

Propiedades

Sean a, b ∈ ℝ y n, m ∈ ℕ, entonces:

PROPIEDAD	EJEMPLO
$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{(-8).27} = \sqrt[3]{-8}.\sqrt[3]{27} = (-2).3 = -6$
$\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[4]{81:16} = \sqrt[4]{81}:\sqrt[4]{16} = \frac{3}{2}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	$\sqrt[3]{3^4} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^4$
$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$5^{-1} = \frac{1}{5}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$

Radicales semejantes

Dos radicales son semejantes cuando tienen igual índice y mismo radicando.

- **Operaciones**

a) **Suma o resta**: solo puede efectuarse cuando los radicales son semejantes.

Ejemplo: $3\sqrt{3} + 8\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{a} = 11\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{a}$

Producto o cociente: primero hay que reducirlo a índice común.

Evita cometer el siguiente error:

$\sqrt{a+b} \cancel{=} \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Ejemplo:

$\sqrt{9+16} \overset{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$

$\sqrt{25} \overset{?}{=} 3 + 4$

$5 \overset{?}{=} 7$

lo cual es ¡INCORRECTO!

Ejemplo: $\sqrt{a}.\sqrt[3]{b} = \sqrt{a^3.b^2}$

Racionalización de denominador: se multiplica y divide por una expresión adecuada, de manera que permita suprimir los radicales del denominador.

Ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$
$$= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Esta notación es útil, sobre todo, para **expresar números muy grandes o muy pequeños.**

Definición

N = a, bcd... x 10^n

a: parte entera (solo una cifra, entre 1 y 9)

bcd: parte decimal

10^n: potencia entera de base 10

- Si n es positivo, entonces N es grande.
- Si n es negativo, entonces N es chico.

Operaciones

a) Para las *sumas* y *restas* hay que preparar los sumandos de modo tal que tengan todos la misma potencia de base 10 y así poder sacar factor común.

Ejemplo: $5{,}83.10^9 + 6{,}932.10^{12} = 5{,}83.10^9 + 6932.10^9 = 6937{,}83.10^9$

b) Para *productos* y *cocientes,* se multiplican (dividen) las mantisas entre si y las potencias de base 10 se suman (restan). Ejemplo:

Ejemplo: $7{,}25.10^4 \times 2{,}20.10^7 = 15{,}95.10^{11}$

PRODUCTOS NOTABLES:

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	**CUBO DE UN BINOMIO** $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
DIFERENCIA DE CUADRADOS $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	**SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

LOGARITMO DE UN NÚMERO REAL

Definición

$$log_b a = n \iff b^n = a, con\ a, b > 0\ y\ b \neq 1$$

a es el argumento del logaritmo

b es la base del logaritmo

n valor del logaritmo.

- **Propiedades**

Nombre	En símbolos
Logaritmo de un producto	$\log_b(x.y) = \log_b x + \log_b y$
Logaritmo de un cociente	$\log_b(x:y) = \log_b x - \log_b y$
Logaritmo de una potencia	$\log_b x^n = n . \log_b x$
Cambio de base.	$\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b} \quad \forall\ a > 0\ y\ a \neq 1$
Logaritmo en base a de a.	$\log_a a = 1$
Logaritmo de uno.	$\log_a 1 = 0$

Si la base es el número neperiano "e", entonces:

$\ln x = \log_e x \rightarrow$ logaritmo natural o neperiano

Con la presentación de esta última operación dentro del conjunto de los números reales cerramos la selección de contenidos pensados para este primer módulo. Por ello, a modo de síntesis recordamos que:

$$\text{Reales}\begin{cases}\text{Irracionales}\\ \text{Racionales}\begin{cases}\text{Fraccionarios}\\ \text{Enteros}\begin{cases}\text{Naturales}\\ 0\\ \text{Enteros Negativos}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

TRABAJO PRÁCTICO N° 1

"CONJUNTOS NUMÉRICOS"

El siguiente trabajo tiene la intención de ofrecer al alumno ingresante una selección de actividades para la revisión de todos los conceptos abordados en torno a los conjuntos numéricos, tomando como conjunto final al conjunto de los números reales y todas las operaciones aritméticas y propiedades en ellos.

Una recomendación importante para desarrollar estas actividades es la de tener en cuenta las propiedades que han sido abordadas, como así también los ejemplos que se despliegan a continuación de cada conceptualización. Estos deben servir de guía al resolver otros problemas en dónde esos conceptos son demandados.

1) Dado el conjunto $X = \left\{3,\ -1,\ e,\ \frac{6}{6},\ \sqrt{5},\ \frac{7}{4},\ 0.85,\ 4j,\ 62,\ 1.\hat{3}\right\}$, encuentra:

   a) $X \cup Q$

   b) $X \cup N$

   c) $N \cup I$

   d) $X \cup Im$

   e) $X \cup I$

   f) $X \cup Z$

2) Contesta si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

   a) La diferencia entre dos números racionales es otro racional.

   b) Existen infinitos números naturales entre 10 y 25.

   c) Si $a = 4$ y $b = 0$, entonces $a:b = 0$

   d) El cociente entre un número y su opuesto es igual a (-1).

   e) Para todo $a \in R$, $(a^{-1})^{-1} = a$

3) Elige la opción correcta

a) Si n es un número entero, entonces, ¿Cuál/es de las siguientes expresiones representa/n tres números consecutivos?

i. $2n, 2n + 1, 2n + 2$ ii. $4n, 4n + 2, 4n + 4$ iii. $2n - 2, 2n - 1, 2n$

OPCIONES	iii	i y ii	i y iii	ii y iii	TODAS

b) Si $a \in N$ y $b \in Z$, entonces el conjunto más pequeño al que pertenece $\frac{a}{b}$ es:

OPCIONES	R	I	Z	Q	N

c) ¿Qué número dividido por $\frac{5}{p}$ da como resultado $\frac{p}{5}$.

OPCIONES	$\frac{p^2}{5}$	$\frac{p}{5}$	$\frac{5}{p}$	$\left(\frac{p}{5}\right)^2$	1

4) Sean a y b enteros, $b \neq 0$. Si $a - b = 175$ y la división de a por b tiene cociente 15 y resto 7, hallar a y b.

5) Si se divide un número natural a por 2 se obtiene como cociente entero un número que llamamos b y el resto 0. Al dividir b por 2 obtenemos como cociente entero un número c y el resto 1. Luego dividimos c por 2 y en este caso el cociente es 1 y el resto 0. ¿Cuál es el número a?

6) Razona si las afirmaciones siguientes son falsas o verdaderas poniendo un contraejemplo en aquellas que sean falsas.

a) Hay números enteros que no son racionales
b) Hay números reales que no son racionales
c) Un número real es racional o irracional
d) Todo número decimal es real
e) Todo número decimal se puede escribir en forma de fracción
f) Todo número decimal periódico se puede escribir en forma de fracción
g) Un número irracional es real
h) Hay números racionales que no son reales
i) Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales
j) Todos los números racionales tienen infinitas cifras decimales que se repiten
k) Algunos números racionales tienen infinitas cifras decimales que se repiten

7) Realiza las siguientes operaciones sobre el conjunto de los números reales.

a) $(3-8)+[5-(-2)]$

b) $5-[6-2-(1-8)-3+6]+5$

c) $-10-\frac{2}{3}+2\cdot\left(-\frac{2}{3}-1+\frac{4}{5}\right)-2\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{5}{2}\right)$

d) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\right)$

e) $2^{-4}.\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}.2^{6}:(2^{-2}.2^{3}.2)^{5}$

f) $\left(3-\frac{1}{5}\right)+\left(2-\frac{1}{6}\right)$

8) Escribe un número que cumpla con las condiciones dadas:

a) Decimal periódico puro que al redondear a la milésima da 3,677

b) Decimal periódico mixto que al truncar a la centésima da 8,97

c) Irracional que al redondear a la diezmilésima de 5,0023

9)

a) ¿De qué número es 150 la sexta parte?

b) ¿De qué número es 900 el 51%?

10) Expresa en forma de fracción los siguientes números:

a) 3,666...

d) 4,33333...

c) 12,1333...

b) 3,0002222...

e) 3,3332323232...

f) 105,330202...

11) Desarrolla las potencias

a) $(p-1)^2$

b) $(q+p^2)^2$

c) $(q^2-1)^3$

d) $(x^2z+3y^3)^2$

e) $(\sqrt[3]{y}-x^3)^3$

f) $(2z^{-1}y+x^{1/3})^3$

12) Expresa estos radicales como potencia.

a) $\sqrt[3]{27}=$

c) $\sqrt[3]{-125}=$

b) $\sqrt[8]{64}=$

d) $\sqrt[4]{1000}=$

13) Expresa los radicales dados como potencia de exponente racional y resuelve:

a) $\sqrt[3]{7^9}=$

b) $\sqrt{13^4}=$

c) $\sqrt{\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}=$

d) $\sqrt[3]{10^{12}}=$

e) $\sqrt[4]{15^8}=$

f) $\frac{7^{-2}.\sqrt{\frac{1}{7}}}{\sqrt[3]{7^{-5}}}=$

14) Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{32}-\sqrt{8}$ b) $5\sqrt{18}-\sqrt{32}+2\sqrt{72}$ c) $\sqrt[3]{3}.\sqrt[4]{3^3}:\sqrt[6]{3^4}$

d) $\sqrt{\sqrt{5}}.\left(\sqrt{3}\right)^2$ e) $\sqrt[5]{2}:\sqrt[3]{2^2}.\sqrt[10]{2^7}$ f) $3\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{375}$

15) Racionaliza el denominador

a) $\dfrac{3.\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ c) $\dfrac{8}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{4}+5}$ e) $\dfrac{\sqrt{p}-\sqrt{m}}{\sqrt{p}+\sqrt{m}}$ f) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

16) Desarrolla y expresa el resultado usando exponentes racionales.

a) $\dfrac{x^3\sqrt[3]{x^{-4}}}{\sqrt[5]{x^2}}$ c) $\dfrac{5.\sqrt[3]{9}}{\sqrt{27}.\sqrt{125}}$

b) $\sqrt{x\sqrt{x^{-1}y}}$ d) $\dfrac{\left(\sqrt{2}.\sqrt{2}\right)^6}{\sqrt[3]{16}}$

17) Resuelve las siguientes operaciones combinadas.

a) $2,1\hat{6}+\dfrac{1}{4}.\dfrac{(-3)}{2}-\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{8}\right]$

b) $\dfrac{\left(2-\dfrac{1}{5}\right)^2}{\left(3-\dfrac{2}{9}\right)^{-1}}:\dfrac{\left(\dfrac{6}{7}.\dfrac{5}{4}-\dfrac{2}{7}:\dfrac{1}{2}\right)^3}{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{5}\right)}-\dfrac{700\times10^{-2}}{0,035\times10^3}$

c) $\sqrt{\dfrac{a}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2a}}-\sqrt{\dfrac{2}{a}}$

d) $(9^{0,5}+9^{-0,5})\left[(-27)^{1/3}+(-8)^{2/3}\right]^{-1}$

18) Expresa cada número en notación científica

a) $123,5248 \times 10^5=$ ....
b) $5437,65 \times 10^8=$ ....
c) $1200000 =$ ....
d) $0,01245 \times 10^9 =$ ....
e) $9877,3288 \times 10^{-5} =$ ....
f) $0,00000000132 =$ ....

19) Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica (usa tu calculadora).

a) $8,05 \times 10^7 + 3,16 \times 10^7=$ ....
b) $3,11 \times 10^4.\ 2,22 \times 10^2=$ ....
c) $3,13 \times 10^8 - 1,66 \times 10^7 =$ ....
d) $9,14 \times 10^{10}: 3,07 \times 10^6 =$ ....

20) Expresa mediante intervalos el conjunto de reales que cumplan:

a) Que sean menores que $\frac{7}{5}$

b) Que sean mayores que -2

c) Que estén entre $-\frac{1}{3}$ y 2

d) Que sean mayores o iguales que 0.

21) Expresa el conjunto solución de las operaciones entre intervalos. Luego, grafícalas.

a) $x<7 \ \cap \ x\geq 3$

c) $x>-3 \ \cup \ x<-5$

e) $(-\frac{2}{3}, 0)$ o $(0, 2)$

b) $x\geq -1$ y $x<2$

d) $\left[-\sqrt{2}, \pi\right] \cap (0, \infty)$

f) $\left[-1, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 4\right)$

22) El número – 12 es menor que – 3, es decir: $-12<-3$.

a) ¿es $(-12) \cdot 5$ menor que $(-3) \cdot 5$?

b) ¿es $(-12) \cdot (-4)$ menor que $(-3) \cdot (-4)$?

23) Determina el conjunto de los números:

a) **Naturales**, que satisfacen $-\pi \leq x < 4e$

b) **Enteros**, que satisfacen $-5e \leq x \leq 2\sqrt{2}$ ($e:$ *número* $e=2{,}71...$)

24) Si a y b son reales positivos y además $a<b$ y $b>1$, ¿cuál de las siguientes proposiciones es falsa?

a) $a\,b>0$

b) $b^2>a$

c) $\frac{1}{a-b}>0$

d) $\frac{1}{a+b}>0$

e) $a+b>1$

25) Desarrolla aplicando propiedades.

a) $\log_a \frac{xy}{z}$

b) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right)^2$

c) $\log_a \frac{x^3 y}{\sqrt{z}}$

26) Escribe como un solo logaritmo

a) $\log xy - 2\log \frac{x}{y} =$

b) $4\log_2 \frac{\sqrt{a-b}}{a} - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{a-b}{a}\right)^4 =$

c) $2\log_5 x - \frac{1}{3}\log_5 b + (x+2)\log_5 7 =$

27) Aplica la definición y/o propiedades para encontrar el valor de x tal que:

a) $\log x^3 = \log 6 + 2\log x$

b) $2\log x = \log(10-3x)$

c) $\log x = \dfrac{2-\log x}{\log x}$

d) $\log(25-x^3) - 3\log(4-x) = 0$

e) $\log_x 81 = -4$

f) $\log_9 \sqrt[4]{3} = x$

28) Sabiendo que $\log 2 \approx 0{,}3$ y que $\log 3 \approx 0{,}48$, calcula aplicando propiedades:

a) $\log\ 0{,}02$

b) $\log_2 \sqrt[5]{2} + \log_2 8 + \log_2 \dfrac{1}{4}$

c) $\log \dfrac{1}{\sqrt[4]{0{,}6}}$

d) $\log \sqrt[3]{\dfrac{5}{9}}$

e) $\log \sqrt[4]{780+1{,}25}$

f) $\log \dfrac{0{,}125 . \sqrt[4]{80^3}}{(3{,}2)^3 . 0{,}8^{10}}$

29) Dado, $\log_a \sqrt[3]{a\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$. Calcula: $\log_a \sqrt[4]{\left[a\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right]^3}$

30) Halla el valor de x en: $\dfrac{1+\log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}\right)} = 1$

31) Resuelve:

a) $2^{\log_7\left(x^2-7x+21\right)} = 3^{\log_7 4}$

b) $\log_x 2 \,.\, \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$

APLICACIONES

32) Tenemos un tablero de ajedrez (64 casillas). Por cada casilla ponemos tantos granos de arroz según el siguiente orden, en la primera casilla del tablero un grano de arroz; en la segunda casilla, 2 granos de arroz; en la tercera, 4 granos; en la cuarta, 8 granos y así sucesivamente por las demás casillas.

a) ¿cuántos granos pondremos en la última casilla del tablero? Y en la décimo quinta?

b) ¿cuántos granos habrá si sumamos las primeras 20 casillas del tablero?

33) Supongamos que en 1 kg de arroz hay 5.200 granos. Teniendo en cuenta lo calculado en b), determina:

¿Cuántas bolsas de medio kg se podrían envasar?

¿Cuántos granos habrá en bolsas de 5 kg?

34) Un agricultor dispone de un campo de 100 hectáreas. Si sólo utiliza un cuarto de ellas para plantar tomates. Calcula:

a) ¿Cuántos m^2 ha plantado?; b) ¿qué fracción de la parcela no ha plantado?; c) ¿cuántos m^2 quedan sin plantar?

35) Una bomba centrífuga vierte 10048 l/hora de agua en un depósito cilíndrico de 5 m de diámetro y 3,2 m de alto. Calcule qué altura habrá alcanzado el agua al cabo de 4 horas de funcionamiento y cuántos litros de agua faltan para llenar totalmente el depósito.

36) En una escuela, el 33% de los alumnos estudia inglés y 1/3 francés. ¿Cuál es el idioma más elegido?

37) Al tostarse el café, este pierde aproximadamente un quinto de su peso. Si se tuesta 60 kg, ¿Cuánto café quedará?

38) El gas anhídrido carbónico se encuentra en la atmósfera en la proporción de 0,3 %. Si 1 litro pesa 1,96 g, ¿Cuánto pesará el anhídrido carbónico contenido en un salón de 10 metros de largo, 8 metros de ancho y 5 metros de alto?

39) La velocidad de la luz, en el vacío, es de 3x 105 km/s. ¿Cuántos centímetros recorre la luz en una hora? ¿y en un año? Expresa los resultados en notación científica.

40) Una determinada bacteria mide $3{,}0 \times 10^{-6}$ m. ¿Cuántas bacterias colocadas en línea recta serían necesarias para cubrir $1{,}2 \times 10^2$ cm de longitud?

41) El diámetro de la luna es de aprox. 3500 km. ¿Cuánto tiempo tardaría en dar una vuelta completa alrededor de la misma, un satélite cuya órbita se encuentra a 100 km de la superficie lunar, si su velocidad media es de 5×10^5 m/h?